Jordens magnetfelt

Studieretningsopgave

Skrevet af: Jeppe Brauer
Afleveret d. 18. December 2014
Antal Tegn: 37.006

Abstract:

This paper investigates how a magnetic dipolar field can be described mathematically, and accounts for the physics behind constant as well as oscillating dipolar fields. Two experiments have been performed and analyzed in the paper, one of which is a measurement of an oscillating dipolar field, and the other one is a measurement of a constant dipolar field. The data from the experiment is then compared to the expected mathematical tendencies.
Additionally it accounts for modern measurements of the earth's magnetic field, and examines data collected from a satellite from the recently launched SWARM project. To utilize the data from the satellite, coordinate transformation is used to transfer the data, from the coordinate system of the satellite to the coordinate system of the earth. To allow this coordinate transformation both spherical coordinates and Euler angles are utilized.
Further more the data from the satellite and the data from the experiments are compared, to allow a conclusion of whether or not the earth magnetic field can be considered a magnetic dipole.

Indholdsfortegnelse

ABSTRACT **0**

INDLEDNING **2**

MAGNETFELTER **2**

HVAD ER ET MAGNETFELT? 2
HVAD ER JORDENS MAGNETFELT? 3
HVORDAN FINDES DET MAGNETISKE MOMENT FOR EN SPOLE? 4
HVORDAN PÅVIRKER MAGNETFELTER LADEDE PARTIKLER? **6**

MÅLING AF MAGNETFELTER **7**

REDEGØRELSE FOR HALL-SONDEN: 7
REDEGØRELSE FOR ELEKTROMAGNETISK INDUKTION: 8
HVORDAN MÅLES JORDENS MAGNETFELT? **11**

FORSØG **11**

FORSØGS BESKRIVELSE: 11
FORSØGS RESULTATER: **15**

ANALYSE AF SATELLITMÅLINGER **18**

SATELLITMÅLINGER AF JORDENS MAGNETFELT: **18**

KONKLUSION **25**

LITTERATURLISTE **26**

BILAG **27**

BILAG 1: DET OSCILLERENDE FORSØG 27
BILAG 2: HALL-SONDE FORSØGET 28
BILAG 3: GRAF FOR SAMMENLIGNING AF TID OG AFSTAND 28
BILAG 4: INDSTILLING AF OSCILLOSKOP 29
BILAG 4: BESKRIVELSE AF SATELLITDATA **29**

Indledning:

Jeg vil i denne opgave undersøge, hvordan satellitmålinger af jordens magnetfelt, kan sammenlignes med to simple model forsøg, hvor fluxtætheden af e magnetisk dipol måles. Disse forsøg vil måle et konstant magnetfelt ved hjælp af en Hall-sonde, og et oscillerende magnetfelt ved at måle den inducerede spænding i en måle spole.
Til dette vil jeg inddrage Faraday's induktions lov, for at muliggøre en sammenligning af et konstant og et oscillerende magnetfelt.
Jeg vil også inddrage formler, som vil gøre det muligt at beskrive magnetfelterne matematisk. Denne matematiske beskrivelse af hvordan magnetfelterne burde være.
På baggrunden af teorien bag dipolfelter vil jeg lave en sammenligning af den forventede data og min forsøgsdata, for at undersøge hvor præcise mine målinger er.
Jeg vil anvende sfæriske koordinater til at beskrive positionen af mine forsøgsmålinger og satellittens målinger. Jeg vil også anvende teorien bag koordinattransformationer, herunder Eulervinkler, For at kunne beskrive satellittens målinger i forhold til jorden.
Til sidst vil jeg sammenligne med min forsøgsdata, og satellitmålinger af jordens magnetfelt, for at bestemme om jordens magnetfelt kan blive anset som et dipolfelt.

Magnetfelter:

Hvad er et magnetfelt?

Det er svært at give en præcis definition på hvad et magnetfelt er. Et magnetfelt er ikke en fysisk ting, da det ikke udsender partikler eller stråling af nogen art. Kendetegnende for et magnetfelt er dog, at to magnetfelter kan vekselvirke, og på den måde påvirkes af en kraft. Denne påvirkning kan være meget nyttig, og den kan også både måles og føles. Selvom et magnetfelt kan påvirkes af denne kraft, indeholder magnetfeltet ikke noget energi. Dog kan det bruges til at overfører energi trådløst, f.eks. i en elektrisk motor.

Der er to egenskaber som er fælles for alle magnetfelter:

- Alle magnetfelter skabes af elektriske strømme. Dette kan både være frie elektronbevægelser i en leder, eller elektronbevægelser i atomerne, som f.eks. i en permanent magnet.

- Magnetfelter kan påvirkes, hvis der placeres et materiale i det. Nogle materialer påvirker magnetfelter mere end andre. Især ferromagnetiske materialer, såsom jern, påvirker magnetfelter meget.[1]

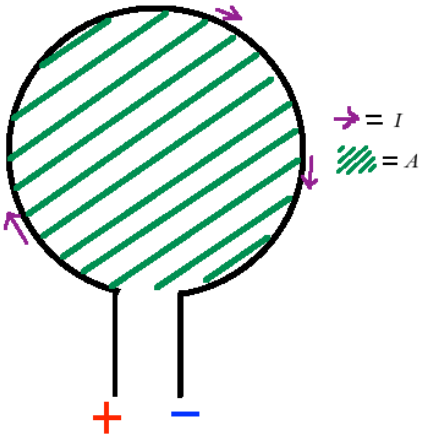
Hvad er jordens magnetfelt?

Jordens magnetfelt er i bund og grund en gigantisk magnet, der er dybt inde i jordens indre. Som beskrevet før, er magnetfelter dannet af elektriske strømme, og dette betyder også, at der i jordens indre, må løbe nogen elektriske strømme. Disse elektriske strømme menes at blive dannet i jordens flydende ydrekerne[2]. Magnetfeltet dannet af jorden er et dipolfelt, dvs. at der er en nordpol og en sydpol, men disse poler ligger ikke fast. Dette skyldes, at strømmene der går i jordens ydrekerne løber meget kaotisk, og kan ændre sig meget pludseligt. Meget tyder også på, at polerne har skiftet plads. Dette kaldes også en polvending.[3] Disse polvendingerne sker helt tilfældigt, men i gennemsnit er der ca. 1 million år mellem polvendingerne[4].
Jordens magmnetfelt bliver brugt til mange ting. F.eks. bruger mennesket det til at finde vej ved hjælp af et kompas.
En anden meget vigtig funktion af jordens magnetfelt er, at det afbøjer kosmisk stråling. Dette betyder, at jorden er beskyttet mod solstorme, og anden kosmisk stråling, hvilket er godt, da denne stråling er farlig for mennesker.
Fordi jordens magnetfelt er så vigtigt for mennesket, og fordi det kan ændre sig så pludseligt, er det vigtigt at overvåge det. Dette kan gøres på flere måder, hvoraf en af dem er ved hjælp af satellitter. Hvordan disse målinger foretages, er forklaret mere dybdegående på side 11.

---

[1] Gyldendal. *magnetfelt*. Lokaliseret d. 9. December 2014: http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Elektromagnetisme,_elektron-_og_ionoptik/magnetfelt
[2] Maule, Cathrine F. og Nils Olsen. *Jordens Magnetfelt Ørsted-satellitten og dens efterfølgere.* Naturens verden. d. 11. December 2006. s. 48-50
[3] Maule, 2006, s. 51-52
[4] Bryldensholt, Morten. m.fl. *ORBIT 3.* 3. Udgave. Systime. 2004. s. 17

Hvordan findes det magnetiske moment for en spole?



For at angive hvor kraftig en magnet er, kan man bruge det magnetiske moment for en spole.
For i første omgang at simplificere bestemmelsen af en spoles magnetiske moment, har jeg valgt, at tage udgangspunkt i en spole der har én vinding. Dette kaldes også en strømløkke.
Hvis man ser på illustrationen til højre, ses det, at der er to værdier der kan ændre sig fra løkke til løkke. Dette er løkkens areal "*A*" samt den strømstyrke "*I*" der løber gennem løkken.
Når man kender disse to værdier, kan man bestemme hvad løkkens magnetiske moment er.
Det magnetiske moment for en spole med én løkke er derfor bestemt ved:

$\mu = IA$ [5]

Hvor μ er det magnetiske moment

Forudsættes det at man har to spoler med samme areal, og at den samme strømstyrke løber gennem begge to, så vil det totale magnetiske moment for de to spoler, være det dobbelte af, hvad det er for den ene. Så hvis man forstiller sig, at løkkerne ligger oven i hinanden, vil der være en direkte proportionalitet mellem antallet af løkker og det magnetiske moment for spolen. Derfor vil det magnetiske moment for en spole med flere vindinger være:

$\mu = NIA$

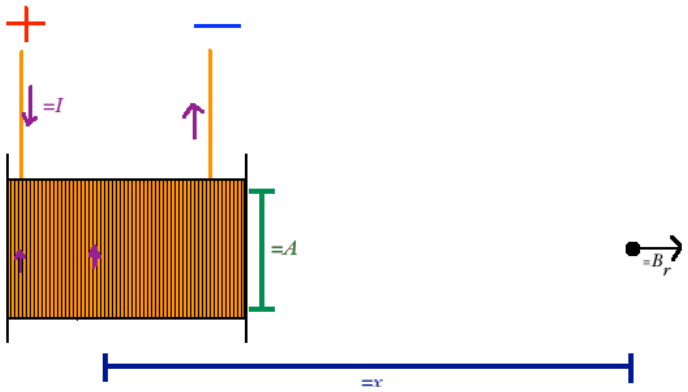
Hvor N er antallet af vinindinger i spolen. Denne formel kræver dog at viningerne i spolen er tætte, da man i formlen går ud fra, at vindingerne ligger oven i hianden.

Dette magnetiske moment dannet af spolen genererer et magnetiske felt (fluxtæthed) rundt om spolen.. Fluxtætheden, som har enheden tesla (T),[6] har også en retning og beskrives derfor med en vektor

Udregningen af fluxtætheden i en magnetisk spole er illustreret på næste side:

---

[5] Young, Hugh D. Og Roger A. Freedman. *Sears and zemansky's University Phisycs.* 12. Udgave. Pearson Addison-Wesley. 2008. s. 937
[6] Bryldensholt, 2004, s. 17



Her er I igen strømstyrken gennem løkken og A er arealet af spolen.

For at udregne det magnetiske felt fra spolen i afstanden "x" fra spole langs dens akseretning, skal der også tages højde for permabilitetskonstanten, som er: $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ [7]

Når man tager højde for disse informationer, får man formlen:

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$ [8]

I denne formel er a radius af spolen, og formlen kan derfor også skrives således:

$$B_x = 2\frac{\mu_0 IA}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Hvor A er arealet af spolen.

I denne formel er der ligesom i det forrigere eksempel, kun taget højde for at spolen har 1 vinding. Derfor kan N, med samme forudsætninger som i det tidligere eksempel tilføjes , og dette giver formlen:

$$B_x = 2\frac{\mu_0 NIA}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Denne formel bruges til at beregne det magnetiske moment for en spole langs aksen i et nærfelt, altså en måling foretaget tæt på spolen. Hvis man forestiller sig, at man bevæger sig langt væk fra magnetfeltet og fortager målinger i fjernfeltet, vil radius af spolen blive meget lille i forhold til afstanden mellem de to spoler, og bliver derved minimal i forhold til reasultatet. Derfor kan også forklares matematisk ved:

---

[7] Gyldendal. *Universalkonstant*. Lokaliseret d. 9. December 2014: http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/M%C3%A5l_og_v%C3%A6gt/universalkonstant

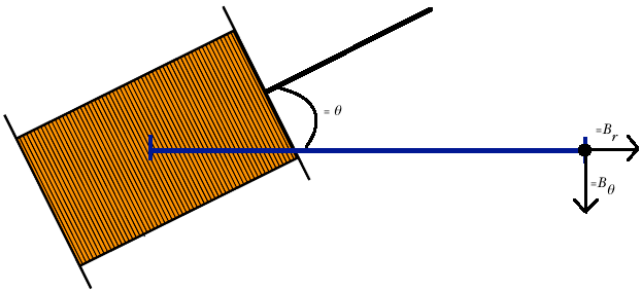
[8] Young, 2008, s. 968

$$B_r = 2\frac{\mu_0 NIA}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}} \rightarrow 2\frac{\mu_0 NIA}{4\pi * x^3} \quad \text{For } x >> a$$

Og dette kan omskrives til:

$$B_r = 2\frac{\mu_0 NIA}{4\pi * x^3} = 2\mu\frac{\mu_0}{4\pi * x^3}$$

Hvis man ser på billedet forneden, er der illustreret en situation hvor magnetfeltet ikke er parallelt med måleretningen.



Denne vinkelafhænginghed "θ" mellem målespolen og magnetfeltet tages der højde for i følgende formel:

$$B_r = 2\mu * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\cos(\theta)}{x^3}$$ [9]

Som det også er illustreret på tegningen, er der også to retninger der skal tages højde for i udregningerne. En der vender væk fra spolen, og en der er vinkelret på denne.
Udregningen af den anden retning B_θ har formlen:

$$B_\theta = \mu * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\sin(\theta)}{x^3}$$

Nu da man har udregninger til begge retninger, kan man danne sig et billede af hvor kraftigt magnetfeltet er, samt hvilken retning feltet vender.

Hvordan påvirker magnetfelter ladede partikler?

Hvis man lader strøm gå gennem en leder i et magnetfelt, kan det ses, at lederen bliver påvirket af en kraft. Denne kraft er bestemt til at være:

---

[9] Acosta, D. *Magnetic dipoles.* Lokaliseret d. 9. December 2014: http://mri-q.com/uploads/3/2/7/4/3274160/magneticdipoles-acosta.pdf

$$F = B * I * L * \sin(\theta)$$ [10]

Hvor "F" er kraftpåvirkningen på lederstykket der er påvirket af magnetfeltet. "I" er strømstyrken der løber i lederstykket, "L" er længden af leder stykket, "B" er magnetfeltets fluxtæthed, og "θ" er vinklen mellem lederstykket og magnetfeltets retning. Når denne formel kendes, er det også muligt at påvise hvad enheden tesla er, da B har enheden tesla. Dette gøres ved:

$$\frac{F}{I * L * \sin(\theta)} = B$$

Hvis disse variabler omskrives til deres enheder, ses det at 1T er:

$$T = \frac{N}{A * m}$$ [11]

Denne påvirkning af strømledere ses dog kun mens der løber en strøm. Dette må betyde, at magnetfeltet blot påvirker ledningselektronerne når de er i bevægelse, og med denne forudsætning, er det muligt, at bestemme kraftpåvirkningen af de enkelte ledningselektroner. Denne kraftpåvirkning er bestemt til at være:

$$F_l = q * v * B$$ [12]

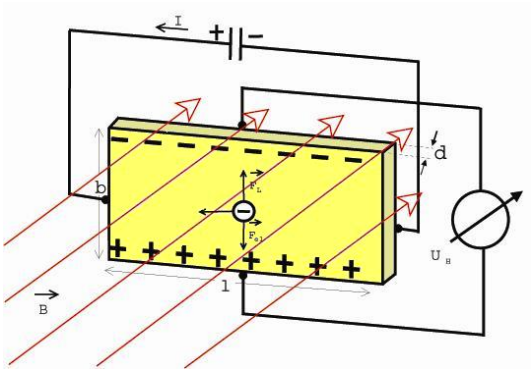
I denne formel er q elektronens ladning, v gennemsnitshastigheden for elektronerne og B er igen magnetfeltets fluxtæthed.

Måling af magnetfelter:

Redegørelse for Hall-sonden:

Hall-sonden anvender principperne beskrevet i forrige afsnit til at angive hvad fluxtætheden for et magnetfelt er.

Til højre ses en illustration af en Hall-sonde. Her ses en metalplade hvor der løber en strøm igennem, og som er påvirket af et magnetfelt. Dette magnetfelt påvirker ledningselektronerne hen til en af siderne, som i tilfældet der er illustreret til højre, er toppen. Når dette sker, vil der



[10] Bryldensholt, 2004, s. 24
[11] Bryldensholt, 2004, s. 25
[12] Bryldensholt, 2004, s. 30-31

blive dannet en spændingsforskel mellem pladernes sider, som gør, at elektronerne, der bliver sendt gennem pladen, både vil blive påvirket af magnetfeltet, denne påvirkning kaldes F_L, og af den positivt ladede side af pladen, denne påvirkning kaldes F_{el}. Dette vil gøre, at der blive en ophobning af elektroner i pladens sider, indtil de to kræfter er lige store og ophæver hinanden. Dette kan også skrives som:

$F_L=F_{el}$

Ved hjælp af et tanke forsøg, kan kraften F_{el} kan defineres som:

$$F_{el} = \frac{U}{d} * q$$ [13]

Hvor U er spændingsforskellen mellem plades sider, d er pladens bredde og q er elektronens ladning.

F_L er defineret på side 7, og da vi ved at $F_L=F_{el}$ vil det også være tilfældet at:

$$q * v * B = \frac{U}{d} * q \Leftrightarrow U = v * d * B$$

Da både v og d er konstante, har man at:

$$U = k * B$$

Dette betyder, at der er en direkte proportionalitet mellem spændingsforkellen mellem pladens sider, og den magnetiske påvirkning.

Teoretisk set vil det være muligt at lave en Hall-sonde med de fleste metaller. Dog bruges halvledere oftest, da disse giver større spændingsforskelle over pladens sider, hvilket derved gør det nemmere at måle disse spændingsforskelle.

Redegørelse for elektromagnetisk induktion:

Hvis man har en elektromagnetisk spole som er tilsluttet et voltmeter, og man over denne spole holder en magnet i en stationær position, vil der ikke være nogen udslag i voltmeteret. Hvis man derimod bevæger magneten, så vil man se udslag i voltmeteret. Dette sker, fordi der en inducerer spænding i den elektromagnetiske spole, som bliver målt med voltmeteret. Den samme påvirkning vil en anden elektromagnetisk spole tilsluttet en vekselstrømskilde, have på spolen tilsluttet voltmeteret.[14]

Dette sker, fordi magnetfelter påvirker ladede partikler, som også er beskrevet på side 6 og 7. Når et vekslende magnetfelt inducerer en spænding i en spole, er det fordi, magnetfeltet trækker og

[13] Bryldensholt, 2004, s. 33-34

[14] Young, 2008, s. 994

skubber i elektronerne, og dette skaber også en vekselspænding i den inducerede spole. Denne inducerede spænding kaldes for den elektromotoriske kraft.

Til dette har Michael Faraday opsat en lov, der bruges til at udregne den elektromotoriske kraft (ε) der dannes af et vekslende magnetfelts induktion af en elektromagnetisk spole. Hans formel lyder:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$ [15]

Hvor Φ er den magnetiske flux igennem spolen.

Hvis fluxtætheden B er jævnt fordelt over arealet af den påvirkede spole, og spolen ikke ændre sig, kan dette skrives som:

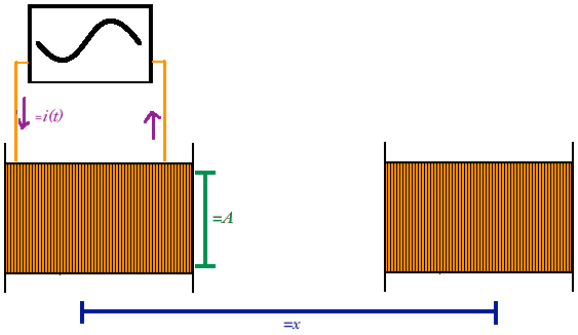
$$\varepsilon = A * \frac{dB}{dt}$$

Hvor A er arealet af spolen, og $\frac{dB}{dt}$ er ændringen af den magnetiske fluxtæthed pr sekund.

Samtidig skal antallet af vindinger i spolen også medregnes, på samme måde som i udregningen af det magnetiske moment. Dette giver:

$$\varepsilon = AN * \frac{dB}{dt}$$

Vi forstiller os situationerne, der er illustreret til højre, hvor den venstre spole inducerer en elektromotorisk kraft i den højre spole. Hvis man i denne situation overvejer en udregning på baggrund af Faraday's lov, samt udregningen af fluxtætheden, som er beskrevet på side 6. Så vil man have at:



$$B(t) = 2\mu(t)\frac{\mu_0}{4\pi * x^3} = \mu(t)\frac{\mu_0}{2\pi * x^3}$$

Da jeg på side 6 tog udgangspunkt i et konstant magnet felt, og nu tager udgangspunkt i et vekslende magnetfelt, så vil det fluxtætheden nu være en funktion af tiden "*t*".

Hvis man indsætter denne B(t) værdi i Faraday's induktionslov får man:

$$\varepsilon(t) = AN * \frac{d\left(\mu(t)\frac{\mu_0}{2\pi * x^3}\right)}{dt} = AN * \frac{\mu_0}{2\pi * x^3} * \frac{d(\mu(t))}{dt} = \frac{\mu_0 AN}{2\pi * x^3} * \frac{d(\mu(t))}{dt}$$

---

[15] Young, 2008, s. 996

Hertil er det givet, at i et alternerende magnetfelt vil μ være:

$$\mu(t) = \mu_{max} * \sin(2\pi * f * t)$$ [16]

Hvor f er det oscillerende magnetfelts frekvens.

Derfor vil man i den ovenstående formel få:

$$\varepsilon(t) = \frac{\mu_0 AN}{2\pi * x^3} * \frac{d(\mu_{max} * \sin(2\pi * f * t))}{dt} = \frac{\mu_0 AN}{2\pi * x^3} * 2\pi * f * \mu_{max} * \cos(2\pi * f * t)$$
$$= \frac{\mu_0 * A * N * f * \mu_{max}}{x^3} * \cos(2\pi * f * t)$$

Her ses nu en cosinus form, med amplituden der står foran. Denne amplituden kaldes V:

$$\varepsilon(t) = V * \cos(2\pi * f * t)$$

$$V = \frac{\mu_0 * A * N * f * \mu_{max}}{x^3}$$

Værdien V er amplituden til den elektromotoriske kraft der dannes i målespolen. Denne værdi "V" kan måles, hvis det ovenstående eksempel, med to spoler overfor med hinanden, bliver udført i praksis. Derfor er den ukendte værdi der skal findes: μ_{max}. Dette er amplituden af det magnetiske moment af det målte magnetfelt. Denne værdi er tilsvarende til den værdi "μ" som blev beskrevet på side 4, da de beskriver det samme. Formlen omskrives til:

$$\mu_{max} = \frac{V * x^3}{\mu_0 * A * N * f}$$

Da denne værdi er tilsvarende til værdien μ der er beskrevet på side 4, kan den dermed også erstatte μ. Dette giver formlerne:

$$B_r = 2\mu_{max} * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\cos(\theta)}{x^3}$$

$$B_\theta = \mu_{max} * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\sin(\theta)}{x^3}$$

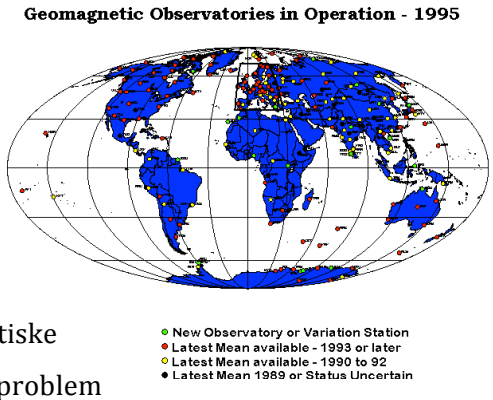
Det er nu muligt at bestemme størrelsen af et oscillerende magnetfelt, uden at vide noget om magnetfeltet, men blot have informationer om målespolen, samt have lavet en simpel måling hvor magnetfeltet og målespolen står parallelt som vist på side 9.

---

[16] Bryldensholt, 2004, s. 29

Hvordan måles jordens magnetfelt?

Der er flere forskellige måder jordens magnetfelt kan måles på. Den mest velkendte, er målinger med satellitter. Dette er også den bedste måde at lave målingerne på, da en satellit kan bevæge sig frit over alle land og vandmasser. Dog var det først i 1999 med Ørstedsatellitten at man for alvor begyndte at måle på jordens magnetfelt med satellitter. Måden man målte jordens magnetfelt før 1999 var ved hjælp af magnetiske observatorier. Et magnetisk observatorium er en bygning, hvor jordens magnetfelt bliver målt på det sted. Når man så har mange målestationer sat op rundt omkring på jorden, er det muligt at danne et billede af, hvordan jordens magnetfelt ser ud. Billedet til højre illustrerer hvor der er magnetiske observatorier rundt omkring på jorden. Her ses også det største problem med de magnetiske observatorier, nemlig at de hovedsageligt er på land. Dette er også grunden til, at satellitter danner et væsentligt bedre billede af jordens magnetfelt, da de også kan lave målinger over vand.[17]



Måden en satellit måler jordens magnetfelt på, er ved at have et magnetometer der måler hvor kraftigt magnetfeltet er i 3 forskellige retninger. Magnetometeret fungerer på nogenlunde samme måde som Hall-sonden. Den største forskel på disse to måleinstrumenter er, at magnetometeret måler magnetfeltet i tre retninger, og Hall-sonden måler kun magnetfeltet i en retning.
Måden satellitten laver målinger over hele jordkloden, er ved at dens kredsløbsbane er i den nord/sydlige retning. Dette betyder, at satellitten bruger jordens rotation til at dække breddegraderne, og bruger sit kredsløb til at dække længdegraderne.

Forsøg:

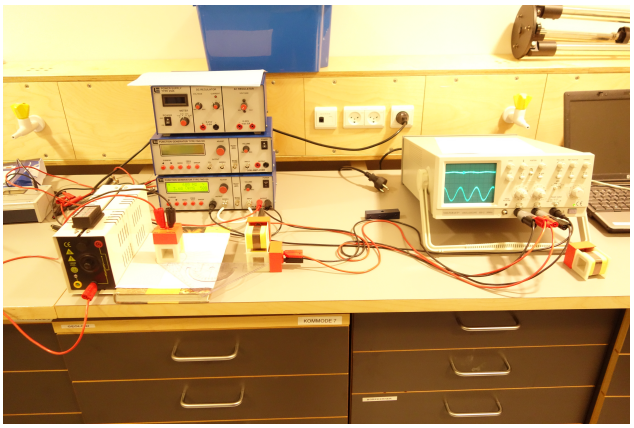
Forsøgs beskrivelse:

Målet med forsøget er, at bestemme hvordan dipolfeltet for en elektromagnetisk spole ser ud. Dette er gjort på to måder. Den første måling er lavet, ved at måle den inducerede spænding i to målespoler placeret i en afstand "*x*" fra spolen der danner et oscillerende magnetfelt.
Samme forsøg er herefter gentaget, men i stedet for at lave målinger af et oscillerende magnetfelt, er målingerne lavet med en Hall-sonde, som måler et konstant magnetfelt.

---

[17] Maule, 2006, s. 50-51

Til højre ses forsøgsopstillingen for målingen af et oscillerende magnetfelt. Her ses spolen der danner magnet feltet til venstre. Fremover vil jeg refererer til denne spole som spole A. De to målespoler til højre, vil jeg referere til som spole B_r for den øverste, og spole B_θ for den nederste.

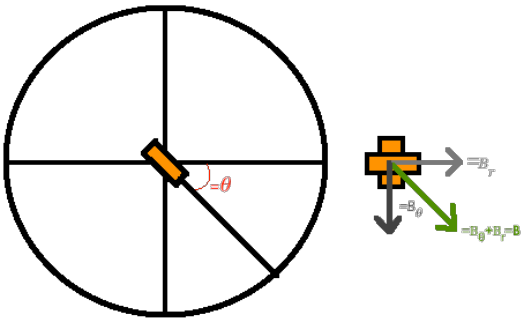


I forsøget står spole B_r og B_θ fast, mens spole A drejes 180° om sig selv. Spole A skal starte og slutte med at være parallel med spole B_θ, og efter en drejning på 90°, er den parallel med spole B_r. Man kan derfor også sige, at spole A starter og slutter med at være parallel med 2. aksen, og efter en drejning på 90°, skal den være parallel med 1. aksen af målespolernes koordinatsystem.

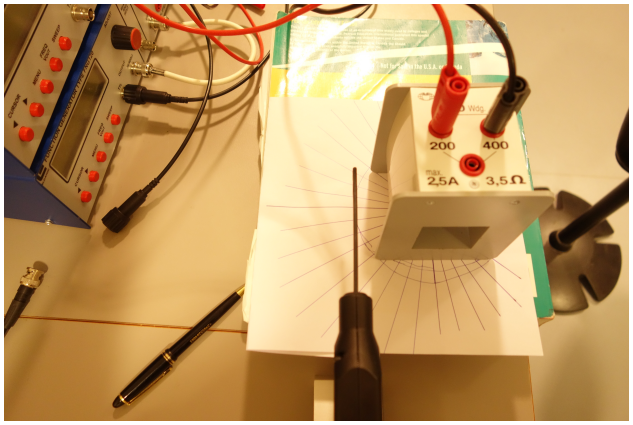
Denne måling vil derfor kun give data til den ene side af magnetfeltet dannet af spole A. Dog må man gå ud fra, at magnetfeltet dannet af spole A, er symmetrisk over 2. aksen, da det er et perfekt dipolfelt der måles på. Denne symmetri kan også forklares som værende symmetrisk over φ vinklen i målespolernes koordinatsystem, hvis man ser koordinatsystemet som et sfærisk koordinatsystem.

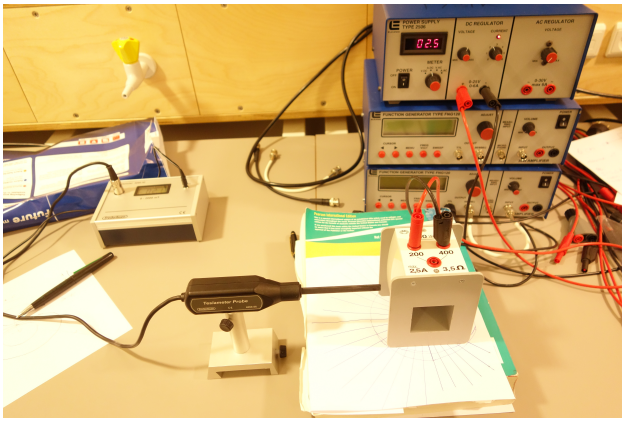
Denne symmetri gør, at en måling på 180°, kan danne et billede af hvordan koordinatsystemet ser ud 360° rundt i både φ- og θ vinklen.

Det magnetiske moment måles og beregnes i to retninger. Grunden til dette er illustreret til højre: Her ses det, at hver af de to spoler fortager målinger i hhv. B_r og B_θ Retningen, som også kan beskrives som tangentialretning og radialretningen til magnetfeltet. Hver for sig kan disse målinger blot sige noget om fluxtætheden i spolernes pågældende retning. Hvis man ser målingerne som vektorer, kan man adderer de to vektorer, som derved vil give en vektor, der beskriver den totale fluxtæthed, samt retningen af magnetfeltet i forhold til den vinkel "θ" spolen er drejet.



Forsøget med Hall-sonden er lavet på lignende vis. Som med det andet forsøg, skal målingerne fortages i to regninger, hhv. B_r og b_θ. Forskellen mellem de to forsøg er blot, at der i forsøget med Hall-sonden måles et konstant magnetfelt, i modsætning til et oscillerende, og at der måles med en Hall-sonde i stedet for en spole. Forsøgsopsætningen for dette forsøg ses på næste side:





Her er de to måleretninger vist, hvor det venstre billede er måleretningen B_r og det højere billede er måleretningen B_θ.

Ud fra målingerne af det oscillerende og det konstante magnetfelt, er det muligt at udregne magnetfeltets magnetiske moment.
For det oscillerende magnetfelt kan følgende formel, som også er beskrevet på side 10, bruges:

$$\mu_{max} = \frac{V * x^3}{\mu_0 * A * N * f}$$

og for at udregne det magnetiske moment ud fra det konstante magnetfelt, er det muligt at tage udgangspunkt i formlen:

$$B_r = 2\mu \frac{\mu_0}{4\pi * x^3} \Leftrightarrow \mu = \frac{4\pi * x^3}{\mu_0} * B_r$$

Her vil B_r være den måling i tesla der kommer ud ved θ=0° grader i B_r målingen.

Det magnetiske moment skal findes for magnetfelterne i de to forsøg. For at gøre dette bruges formlen på side 4. I denne formel skal strømstyrken, der går gennem spolen, kendes. Denne værdi kender jeg til fra forsøget med Hall-sonden, da jævnspændingsgeneratoren også fungerer som et amperemeter. For at finde strømstyrken i det oscillerende forsøg, har jeg i stedet målt spændingen over en modstand på ca. 10 ohm, og ud for dette, er det muligt at udregne strømstyrken der går gennem spolen.
Jeg har i de to forsøg brugt to forskellige spoler, da jeg i forsøget med Hall-sonden havde brug for et magnetfelt der var så kraftigt som muligt. Disse to spolers magnetiske moment var følgende:

	N	I	A	μ
		[A]	[m²]	=N*I*A [A*m²]

Oscillerende spole	800	5,5V/10ohm = 0,55A	0,001225	0,539
Hall-sonde spole	600	2,5	0,0036	5,4

Dette er de magnetiske momenter jeg forventer for de to forsøg.

Når forsøgene er udført, vil de data man ender op med, være den inducerede spænding i spolerne i forhold til vinklen "θ", samt fluxtætheden for magnetfeltet målt med Hall-sonden i forhold til vinklen "θ". For at undersøge om disse målinger er passende, vil det være relevant at bestemme hvordan de burde være. Til dette kan man inddrage formlerne fra side 10:

$$B_r = 2\mu_{max} * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\cos\theta}{x^3}$$

$$B_\theta = \mu_{max} * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{\sin\theta}{x^3}$$

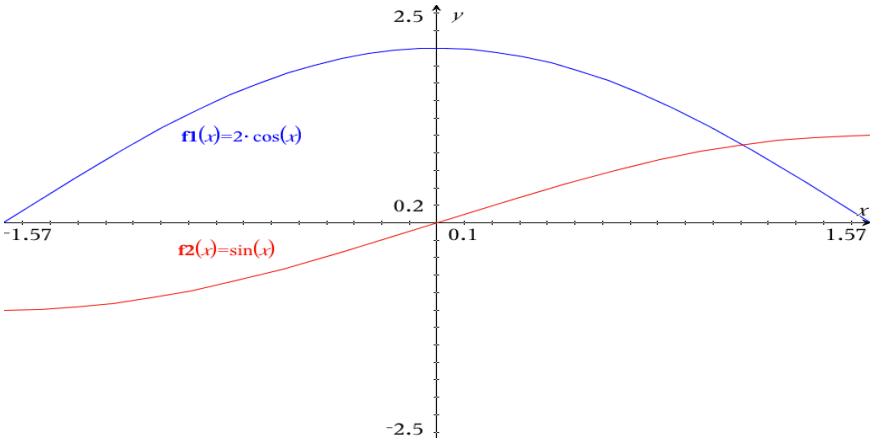
Her er formlerne til det oscillerende magnetfelt vist. Formlerne for det konstante magnetfelt er vist på side 6, men de to formler er de samme da $\mu \Leftrightarrow \mu_{max}$.
Den eneste forskel mellem disse to former er, at B_r har en amplitude der er dobbelt så stor som B_θ, og de to er faseforskudt 90° i forhold til hinanden. Derfor kan formlerne normaliseres med:

$\mu_{max} * \frac{\mu_0}{4\pi * r^3}$ så man får:

$$B_r = 2 * \cos\theta$$

$$B_\theta = \sin\theta$$

Hvis man hertil normalisesrer målingerne tilsvarende, så er det muligt at se om tendensen i målingerne stemmer overens med tendensen af de forventede målinger. Graferne til de forventede målinger ser derfor således ud:

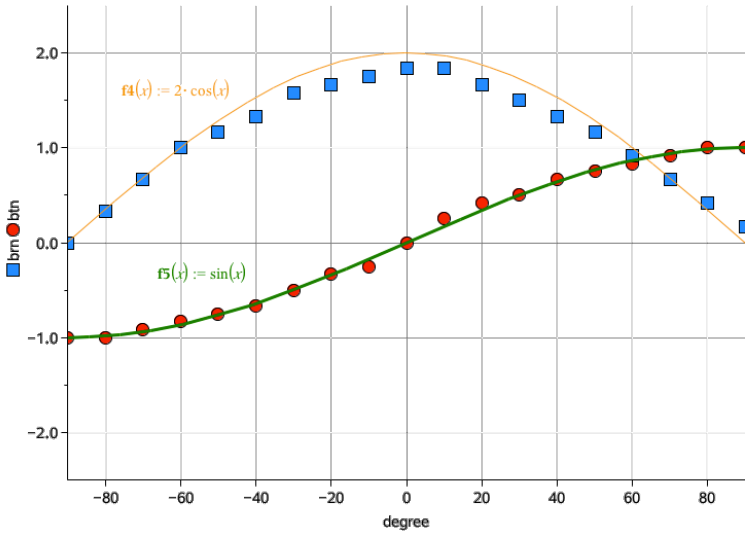


På grafen ses det, at x aksen angiver vinklen "θ" der er angivet i radianmål, og y-aksen angiver den normaliserede måleværdi, og De forventede normaliserede måling for B_r og B_θ er vist.

Forsøgs resultater:

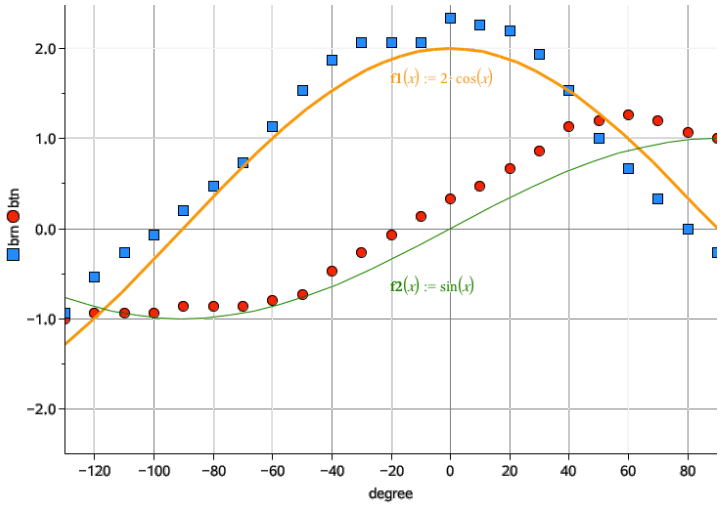
Forsøgsresultaterne er vedlagt som bilag 1 for de oscillerende målinger og bilag 2 for målingerne med Hall-sonde. Fra data for forsøget med et oscillerende magnetfelt ses det, at den første B_θ måling ved -90° er 1,2. Dette punkt vil jeg tage udgangspunkt i, og normalisere talværdierne herefter, så det passer med de forventede normaliserede funktioner. Derfor har jeg divideret alle forsøgsmålingerne med 1,2. Disse resultater ses som Bθnorm og Brnorm i bilag 1.

Disse data har jeg herefter plottet i et koordinatsystem, som også har graferne til den forventede data med. Dette koordinatsystem ses her:



På grafen er de blå plots B_r målingerne og de røde er B_θ målingerne.
Som det kan ses, ligger de målte værdier meget tæt på de forventede værdier. Dette er godt, da det viser teorien understøttes i praksis. Dog er der stadig en ulighed mellem de målte værdier og de forventede værdier omkring 0 grader i B_r målingen. Denne usikkerhed behøver dog ikke at skyldes fejlmålinger i B_r målingerne. Da jeg normaliserede de målte værdier efter B_θ ved -90° vil en forskydning i dette punkt også påvirke de resterende punkter. Et eksempel på dette er, at hvis målingen i B_θ ved -90° var 1,1 i stedet for 1,2, så ville den normaliserede værdi for B_r ved 0 grader have været 2, hvilket derfor ville have passet til de forventede data. Derfor er den usikkerhed ved 0 grader i B_r målingen den totale usikkerhed i hele forsøget, og som beskrevet før, er den meget lille og ubetydelig, da det tydeligt ses, at de målte og forventede data følger hinanden.

Jeg har også lavet samme graf for målingerne af et konstant magnetfelt med en Hall-sonde, hvor jeg også har normaliseret på baggrund af B_θ målingen ved 90° som er -1,5 m/T.



I disse målinger ses der en større usikkerhed end der ses i målingerne af det oscillerende magnetfelt, især i B_θ retningen, men tendensen er stadig tydelig. Hvis man ser på målingen i B_θ retningen, ses det, at den kraftigste måling var ved 60° og ikke ved 90°. Dette kunne tyde på, at der i mine målinger har været en vinkel mellem Hall-sonden og elektromagneten, og at de derved ikke var parallelle ved 90°, men derimod ved 60°. Dette er også grunden til, at jeg valgte at tage målinger fra 90° til -130° i stedet for fra 90° til -90° for at undersøge, om denne forskydning også viste sig i den anden ende af målingerne. Det fremgår ikke fra målingerne, om de begynder at stige, som forventet. Dog ses det, at hældningen mellem punkterne ved disse vinkler er lave, hvilket tyder på, at det følger sinus funktionen, da denne funktion har samme tendens.
Det fremgår også af målingerne, at værdien for B_r burde være omvendt, hvis jeg normaliserede den med -1,5. Dog har jeg valgt at normalisere den med 1,5 i stedet for, da dette gør det nemmere at sammenligne den med formlen: $B_r = 2 * \cos\theta$.
Denne fejl er højst sandsynligt kommet sig af, at jeg i enten B_θ eller i B_r målingen, har vendt Hall-sonden den forkerte vej, hvilket ville resultere i, at jeg i målingen fik det modsatte fortegn.

Det er, som beskrevet på side 13, muligt at udregne det magnetiske moment af spole, på baggrund af min forsøgsdata ved hjælp af formlerne:

$$\mu_{max} = \frac{V * x^3}{\mu_0 * A * N * f}$$

$$\mu = \frac{4\pi * x^3}{\mu_0} * B_r$$

Dette giver magnetiske momenter for de to forsøg på hhv.:

Oscillerende forsøg:

$$\mu_{max}=\frac{0.022\cdot _V\cdot (0.175\cdot _m)^3}{_\mu 0\cdot 800\cdot (0.035\cdot _m)^2\cdot 600\cdot _Hz} \blacktriangleright \mu_{max}=0.159569\cdot _A\cdot _m^2$$

Hall-sonde forsøg:

$$\mu=\frac{2\cdot \pi\cdot (0.06\cdot _m)^3}{_\mu 0}\cdot 3.5\cdot 10^{-3}\cdot _T \blacktriangleright \mu=3.78\cdot _A\cdot _m^2$$

	Forventet data	Forsøgs data	afvigelse
oscillerende	0,539 A*m²	0,1595 A*m²	70,49%
Hall-sonde	5,4 A*m²	3,78 A*m²	30%

Afvigelsen er meget større i det oscillerende forsøg, men generelt for begge forsøg, er afvigelsen mellem det målte og det forventede stor. En fejl jeg lavede i forsøget med et oscillerende magnetfelt var, at jeg havde indstillet oscilloscopet forkert. Bilag 3 viser et billede taget af oscilloscopets indstilling. Her ses det at fintuningen er skruet helt op, hvor den burde være skruet op til den orange streg. Dette gør det svært at sige præcist hvor mange mV/div oscilloscopet var indstillet til. En anden fejl i dette forsøg, var at den modstand jeg brugte, ikke havde en fast modstand, men den kunne justeres. Dette gør, at jeg ikke kan være helt sikker på, hvor stor den modstand jeg målte spændingen over, var.

En fejl i forsøget med Hall-sonden kan være, at jeg til udregning af det magnetiske moment, har brugt formlen for målinger i magnetens fjernfelt, som også er forklaret på side 6. Da Hall-sonde målingerne er lavet i magnetens nærfelt, er dette også en mulig årsag til hvorfor målingen afviger fra det forventede. Generelt for begge målinger er, at meget små fejl, kan have en stor effekt på resultatet. Dette betyder, at selv om jeg har lavet målingerne rigtigt, vil der altid være en usikkerhed.

Analyse af satellitmålinger:

Satellitmålinger af jordens magnetfelt:

Jeg har igennem kommunikation med DTU Space, fået adgang til en afkortet del af målingerne der er lavet med en af de tre satelitter i det nye satellitprojekt SWARM, som blev sendt op d. 22/11-2013[18]. Ved hjælp af dette datasæt, vil jeg redegører for, hvordan målingerne af jordens magnetfelt er fortaget, samt sammenligne disse data med mine egene målinger af et dipolfelt på jorden.

Det komplette datasæt er vedlagt som bilag 5. I datasættet ses en masse tal, og for at demonstrerer hvad disse tal betyder, har jeg valgt at tage udgangspunkt i de første 3 målinger, som ses her:

Tid [dage]	x-pos [10^6m]	y-pos [10^6m]	z-pos [10^6m]	B_x [μT]	B_y [μT]	B_z [μT]	α [°]	β [°]	γ [°]
329.6275	6.5408	-1.6457	-1.3502	18.4903	4.9367	-11.1308	179.8111	12.9650	180.2392
329.6286	6.6400	-1.6881	-0.5974	20.7187	4.5896	-7.7191	179.5201	12.9743	180.5518
329.6298	6.6576	-1.7107	0.1628	22.5551	4.0153	-2.9549	179.2929	12.9880	180.7582

Den første kolonne er målingens tidsangivelse, som er givet som tid efter d. 1/1-2013[19]. Derfor er der muligt at bestemme, præcis hvilket tidspunkt satellitten har fortaget sin måling. Hvis man ser på de første to målinger ses det, at der er omtrent 0,0011 dage mellem de to målinger. Dette svare til:

$$0{,}0011 * 24 * 60 = 1{,}584 \text{ min}$$

Da Swarm satelitten egentligt fortager målinger 50 gange i sekundet, er det datasæt jeg har adgang til, kun et lille udsnit af det fulde datasæt. Det er dog mere end nok til at estimere et billede af jordens magnetfelt.

De næste tre kolonner beskriver satelittens position[20]. Hvis man ser på enheden til disse informationer, virker det som om satellitten kredser om jorden i flere tusinde kilometers højde,

---

[18] ESA. *Swarm facts and figures.* Lokaliseret d. 12. December 2014: http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/The_Living_Planet_Programme/Earth_Explorers/Swarm/Overview2

[19] DTU Space. *Swarm magnetometer data*. Beskrivelse af satellitdata. vedlagt som bilag 4

[20] DTU Space.

men dette er ikke tilfældet. Grunden til tallene er så høje, er fordi de er givet fra jordens centrum ud til satelliten.

Informationerne er her givet i et rektangulært koordinatsystem. For at kortlægge magnetfeltet, er jeg nødt til at omskrive til sfæriske koordinater, da dette vil give mig et mål for hvilken længde og breddegrad satelitten befinder sig på, samt hvilken kredsløbshøjde satellitten har.

For at gøre dette, vil jeg bruge formlerne:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ [21]

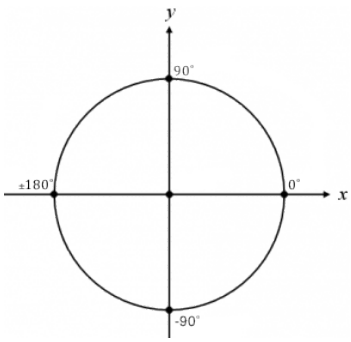
$$\theta = 90 - \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$ [22]

θ vinkelen kan også beskrives som satellittens længdegrads position. Vinklen θ er normalt bestemt ved at den ligger i intervallet [0°;180°], hvor vinklen vil være i intervallet [0°;90°[, hvis z er positiv i de rektangulære koordinater, og i intervallet]90°;180], hvis z er negativ i de rektangulære koordinater. I satellitmålingerne skal intervallet være [-90°;90°]. Dette opnås ved at trække den udregnede vinkel fra 90. Grunden til at intervallet skal være [-90°;90°], er fordi ækvator skal ligge på den 0 længdegrad.

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{dotP\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{norm\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}\right) * sign\left(\det\left(\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}\right)\right)$$

φ udregningen er anderledes end den plejer at være når rektangulære koordinater omregnes til sfæriske koordinater. Dette skyldes, at der i den normale formel som er:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$ [23]



ikke tages højde for om punktet ligger i 3 eller 4 kvadrant.

Formlen jeg har brugt, angiver punkterne som koordinater i koordinatsystemet der er illustreret til højre. I denne formel bruges første led til at bestemme vinklen mellem punktet og y-aksen. Det

[21] Schultz, Jonny. *Matematik Højniveau 1 – Plangeometri og rumgeometri*. 1. Udgave. Trip. 1997 s. 105

[22] Wolfram mathworld. *Spherical coordinates*. Lokaliseret d. 17 December 2014: http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html

[23] Wolfram mathworld. *Spherical coordinates*. Lokaliseret d. 17 December 2014: http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html

andet led, bruges derefter til at bestemme om vinklen er positiv eller negativ.

For at forstå koordinaterne der beskriver satellittens position, er det vigtigt at vide hvordan jordens koordinatsystem ligger. Det er sådan, at jordens z-akse ligger parallelt med jordens rotationsakse. Hvor det geografiske nord ligger på den positive side af z-aksen. Ækvator vil derfor være 0 på z-aksen. x-aksen er bestemt til at ligge i Greenwich i den positive x retning, og z-aksen er bestemt til at ligge 90˚ på x-aksen. Denne akse ligger derfor omkring New-Zealand, i den positive retning.

Jeg vil nu komme med et eksempel på en omskrivning fra rektangulære koordinater til sfæriske koordinater, hvor jeg tager udgangspunkt i satellittens første måling:

x=6.5408 y=-1.6457 z=-1.3502

$$r = \sqrt{6{,}5408^2 + (-1{,}6457)^2 + (-1{,}3502)^2} = 6{,}878 * 10^6 m$$

$$\theta = 90 - \cos^{-1}\left(\frac{-1{,}3502}{\sqrt{6{,}5408^2 + (-1{,}6457)^2 + (-1{,}3502)^2}}\right) = -11{,}32°$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{dotP\left(\begin{pmatrix}6{,}5408\\-1{,}6457\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}{norm\left(\begin{pmatrix}6{,}5408\\-1{,}6457\end{pmatrix}\right)}\right) * sign\left(\det\left(\begin{vmatrix}6{,}5408 & 1\\-1{,}64570 & 0\end{vmatrix}\right)\right) = -14{,}122°$$

Her befinder satellitten sig ca. 7000 km fra jordens indre, og den er ca. på den 11 længdegrad på den sydlige halvkugle og på den 14 breddegrad på den vestlige side.

De næste tre koloner er magnetometerets målinger[24]. Disse målinger er også givet i et rektangulært koordinatsystem. Dog er dette ikke det samme koordinatsystem som satelittens position er givet i. Disse målinger er givet i satelittens koordinatsystem, som kan afvige fra jordens.

Derfor er det nødvendigt at dreje koordinaterne så satellittens koordinatsystem vender rigtigt i forhold til jordens. Dette gøres ved hjælp af Eulervinkler. Euler vinkler er i bund og grund en bestemt matrice der kan ganges på et punkt. Når dette er gjort, vil det samme punkt være beskrevet i et nyt koordinatsystem. I Eulervinkler er der tre matricer, til hhv. at dreje et punkt om

[24] DTU Space.

x, y og z aksen. Disse formler er:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} \cos(x) & 0 & -\sin(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(x) & 0 & \cos(x) \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For at give et eksempel på hvordan de bruges, kan man se den vedlagte opgave a. Her skal et punkt drejes θ grader om x-aksen, efterfulgt af en drejning på φ grader omkring z-aksen. Denne drejning vil se således ud:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) * \cos(\theta) & \sin(\varphi) * \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) * \cos(\theta) & \cos(\varphi) * \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

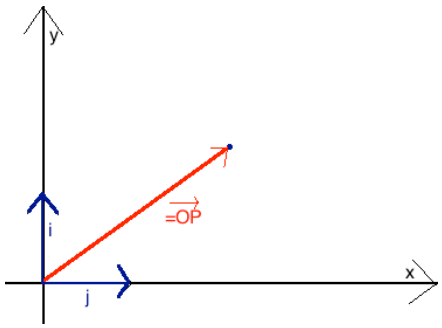
Grunden til at x drejningen står til sidst, er fordi, at når matricerne ganges ind på vektoren, vil man først gange den matrice der står tættest på vektoren ind, og sidst gange den først skrevne matrice ind.

Når nu en matrix haves kan man bestemme om der i matrixen laves en spejling af koordinaterne eller om der laves en drejning. For at gøre dette skal man finde ud af om matrixen er egentlig ortogonal. Dette gøres ved at bestemme determinanten af matrixen. Hvis matrixen har en determinant på 1 eller -1 vil den være en ortogonal matrix. Dette betyder at akserne står vinkelret på hinanden. Hvis matrixen er egentlig ortogonal dvs. At der er tale om en drejning, vil determinanten være 1, og hvis der er tale om en spejling vil determinanten være -1. Et eksempel på dette er den vedlagte opgave b, hvor det skal bestemmes om en matrix er egentlig ortogonal. Udregningen ses her:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright 1$$

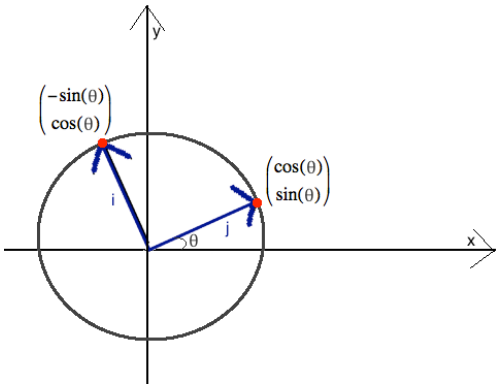
Som det fremgår af udregningen er determinanten af matrixen 1. Dette betyder at matrixen egentlig ortogonal, og at der derfor er tale om en drejning og ikke en spejling.

For at forstå hvordan drejningerne kan laves ved hjælp af disse formler, er det nemmere at se på koordinattransformationen 2 dimensionalt.
På det øverste af de to billeder, er en vektor OP illustreret i et koordinatsystem med enhedsvektorene i og j. Hvis punktet p har koordinaterne (x,y) kan vektoren OP defineres som:



$$\overrightarrow{OP} = x * j + y * i$$

På det nederste af de to billeder, er det illustreret, at de to enhedsvektorer er drejet θ grader om z-aksen. Dette betyder at enhedsvektoren j er flyttet cos(θ) hen af x-aksen og sin(θ) op af y-aksen. Da enhedsvektoren står i 90° på j, vil denne vektor flyttes –sin(θ) hen af x-aksen og cos(θ) op af y-aksen. Hvis man nu sætter disse nye værdier for i og j ind på deres pladser i den tidligere formel får man:



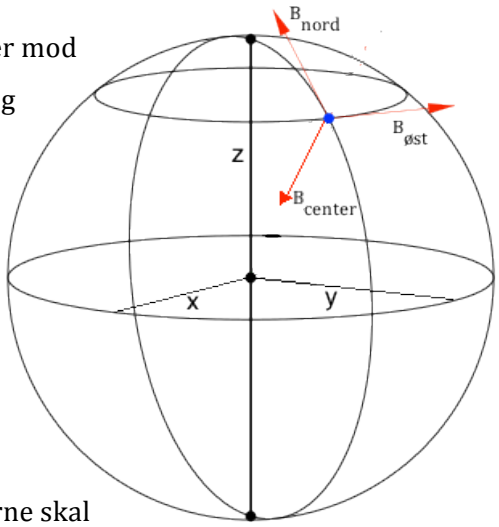
$$\overrightarrow{OP} = x * \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Da man i denne udregning drejede om z-aksen, må koordinaterne for z forblive de samme. Dette vil sige at man kan tilføje z-værdien således:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dette giver den samme formel vist på side 21. De samme udregninger kan laves for de andre drejninger som også er vist på side 21.

For at alle målingerne ligger på samme måde i forhold til jorden, er der et stjernekompas i satellitten. Dette stjernekompas tager et billede af de stjerne det kan se, og ud fra dette billede, giver det en måling af den retningen satellitten vender i rummet. Ud fra denne måling, er det ved hjælp af Euler vinkler, muligt at dreje satellittens data ind efter jordens koordinatsystem.
For at give en forståelse for hvad satellittens målinger skal drejes ind efter, har jeg lavet illustrationen på næste side.
Her er satellitten den blå prik, og det sfæriske koordinatsystem jordens koordinatsystem. de tre vektorer B_{nord} $B_{øst}$ og B_{center} er B_x, B_y og B_z målingerne som er drejet ind efter jordens



koordinatsystem. B_x koordinatet er drejet ind så det altid vender mod nord, B_y koordinatet er drejet ind så det altid vender mod øst, og B_z koordinatet er drejet ind så det altid vender ind mod jordens centrum. Dette er det samme billede som ses i de målinger jeg har lavet i mit forsøg. I mit forsøg, er B_r radial måleretningen og svarer her til B_{center}, B_θ var tangentialretningen og svarer her til B_{nord}. $B_{øst}$ havde jeg ikke med i mit forsøg, da det magnetfelt jeg målte, var symetisk i den akse, og derfor altid ville være 0.
Grunden til, at denne drejning er vigtig, er fordi at alle målingerne skal ligge på samme måde i forhold til jorden.

Denne drejning er hvad de sidste 3 kolonner bruges til.[25] I disse kolonner er der givet tre vinkler satelittens måligner skal drejes, samt en information om hvilke drejninger der skal laves. I dette tilfælde er det 323 drejning der skal laves. Denne kan også kaldes en ZYZ drejning[26]. Dette betyder, at satellittens måling skal drejes α grader om z-aksen, derefter β grader om y-aksen, og til sidst γ grader om z-aksen igen.
For at vise denne udregning, tager jeg udgangspunkt i den første måling, og denne målings tilhørende vinkler. Disse er:

B_x=18.4903	B_y=4.9367	B_z=-11.1308
α=179.8111	β=12.9650	γ=180.2392

Som beskrevet på side 21 ser Z og Y drejningerne således ud:

$$z = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} \cos(x) & 0 & -\sin(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(x) & 0 & \cos(x) \end{bmatrix}$$

Derfor vil hele drejningen se således ud:

$$z = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

Hvis man hertil tager udgangspunkt i datasættes koordinater, vil man få følgende udregning:

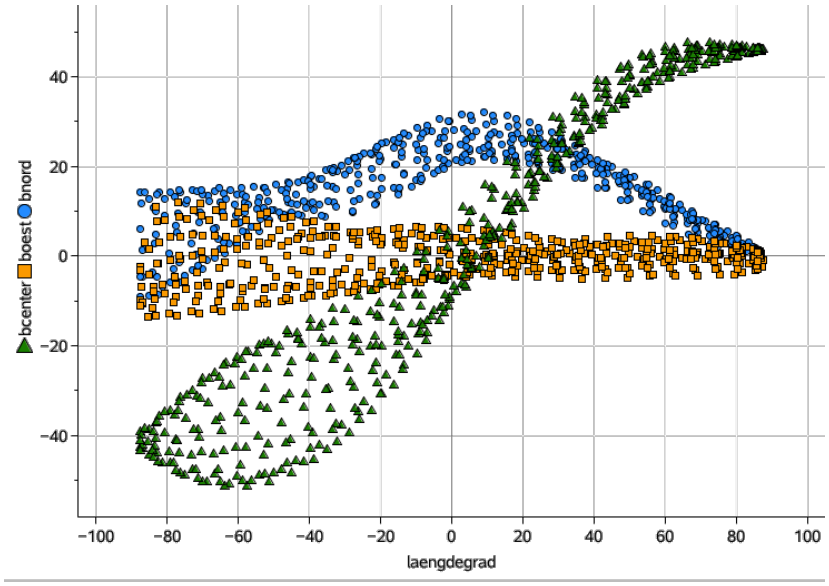
$$\begin{bmatrix} \cos(180.2392) & -\sin(180.2392) & 0 \\ \sin(180.2392) & \cos(180.2392) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(12.965) & 0 & -\sin(12.965) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(12.965) & 0 & \cos(12.965) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(179.8111) & -\sin(179.8111) & 0 \\ \sin(179.8111) & \cos(179.8111) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 18.4903 \\ 4.9367 \\ -11.1308 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 15.5169 \\ 4.94054 \\ -14.9991 \end{bmatrix}$$

Derfor vil koordinaterne, efter er være drejet ind efter jordens koordinatsystem være:

B_{nord}=15,5169 $B_{øst}$=4,94054 B_{center}=-14,9991

Ved hjælp af et regneark, vil jeg lave disse udregninger for de 500 datasæt. For dette vil jeg derefter lave en graf, med de tre måleretninger som y-aksen, og jordens længdegrader som x-aksen. Ud fra denne graf vil det være muligt at bestemme, om jordens magnetfelt ligner et dipol-felt, da det i så fald burde ligne min data meget. Grunden til dette er, at jeg i mit forsøg lavede en graf med den målte data på y-aksen og vinklen "θ" på x-aksen, og da θ vinklen for jorden er det samme som jordens længdegrader, burde graferne se meget ens ud.



Hvis man ser på graferne på side 15 og 16**,** kan man tydeligt se at målingerne af jordens magnetfelt, ligner målingerne af et dipolfelt på jorden meget. Dette er derfor en meget tydelig indikation af, at jordens magnetfelt er et dipolfelt.

Der er dog en forskel mellem satellitmålignerne og mine forsøgsdata. Denne forskel er, at graferne virker til at være faseforskudt 90˚ i forhold til hianden. Forskydningen skyldes en fejl i mit forsøg, da jeg i stedet for at have sat målespolerne ved 0˚, burde have sat dem ved -90˚. Derved ville B_r have startet med at være -2, og sluttet med at være 2. Samtidig ville B_θ have startet med at være 0 og efter en drejning på 90˚ ville den have været 1. Dette er derfor en fejlkilde i forsøgene.

Dog er det overordnet tydeligt at se sammenhængen mellem satellitmålingerne og forsøgsmålingerne.

På samme måde som i mit forsøg, er det nu også muligt at udregne det magnetiske moment af jordens magnetfelt.

Da jordens magnetfelt er et konstant magnetfelt, og satellittens magnetometer derfor også minder mest om en Hall-sonde, skal samme udregning laves for jorden, som blev lavet for Hall-sonden.

For at lave denne udregning, skal afstanden til magnetfeltet kendes. Denne afstand er i dette tilfælde r, som er afstanden mellem satallitten og jordens centrum. På bilag 3 ses en graf af satelittens afstand fra jorden i forhold til tiden. I denne graf fremgår det, at satelittens middelafstand fra jorden er $6{,}87*10^6$m. Målingen B_r eller i dette tilfælde B_{center}, skal også kendes. Dette punkt skal være målingen for B_{center} ved 90°. Denne værdi har jeg bestemt ved hjælp af grafen på side 24. Her fremgår det, at målingen ved 90° er ca. 47 µT. Nu kendes de to informationer, og derved er det muligt at bestemme det magnetiske moment for jorden:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot\left(6.87\cdot 10^{6}\cdot _m\right)^{3}}{_\mu 0}\cdot 47\cdot 10^{-6}\cdot _T \blacktriangleright 7.6197\text{E}22\cdot _A\cdot _m^{2}$$

Da jordens magnetiske moment er bestemt til at være $7.94*10^{22}$ A*m² [27], og udregningen foroven er næsten det samme, er det en meget realistisk måling satelitten har lavet. I denne måling ses afstandens påvirkning på magnetfelter også tydeligt, da jordens magnetiske moment er meget kraftigt, mens fluxtætheden på jordoverfladen blot er 70µT ved nordpolen[28].

Konklusion:

I rapporten beskrives et forsøg hvor både det magnetiske moment og fluxtætheden måles på forskellig vis. Magnetfeltets fluxtæthed målt af både et konstant og et oscillernde magnetfelt, viser at resultaterne stemmer godt overens med de forventede matematiske tendenser, der ligger til grund for målingerne af fluxtætheden i et dipolfelt. Dog passer målingerne af det magnetiske moment ikke lige så godt. Dette skyldes flere ting, som gik galt i de to forsøg, blandt andet en fejljustering af oscilloskopet, og brug af en forkert modstand.
Da resultaterne for fluxtætheden følger de matematiske tendenser, er det derfor også at forvente, at satellitmålingerne følger samme tendenser. Dette skyldes at jordens magnetfelt menes at være en dipol, da den har en nordpol og en sydpol.

Efter at de transformerede satellitdata er blevet analyseret og sammenlignet med mine forsøgsdata, ses en tydelig sammenhæng mellem de to datasæt. Jeg konkluderer derfor, at jordens magnetfelt også følger de samme matematiske tendenser som forsøget, og at jordens magnetfelt derved også er en dipol.

---

[27] Berkeley. *Describing the eart's magnetic field.* Lokaliseret d. 14. December 2014: http://seismo.berkeley.edu/~rallen/eps122/lectures/L05.pdf
[28] Bryldensholt, 2004, s. 18

Litteraturliste:

Værker:

Bryldensholt, Morten. m.fl. *ORBIT 3.* 3. Udgave. Systime. 2004

Schultz, Jonny. *Matematik Højniveau 1 – Plangeometri og rumgeometri*. 1. Udgave, 6. oplag. Trip. 1997

Young, Hugh D. Og Roger A. Freedman. *Sears and zemansky's University Physics.* 12. Udgave. Pearson Addison-Wesley. 2008

Artikler:

Maule, Cathrine F. og Nils Olsen. *Jordens Magnetfelt Ørsted-satellitten og dens efterfølgere.* Naturens verden. d. 11. December 2006. Vedlagt som bilag 6.

Internetmateriale:

Acosta, D. *Magnetic dipoles.* Lokaliseret d. 9. December 2014:
http://mri-q.com/uploads/3/2/7/4/3274160/magneticdipoles-acosta.pdf

ESA. *Swarm facts and figures.* Lokaliseret d. 12. December 2014:
http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/The_Living_Planet_Programme/Earth_Explorers/Swarm/Overview2

Berkeley. *Describing the earth's magnetic field.* Lokaliseret d. 14. December 2014:
http://seismo.berkeley.edu/~rallen/eps122/lectures/L05.pdf

Gyldendal. *magnetfelt*. Lokaliseret d. 9. December 2014:
http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Elektromagnetisme,_elektron-_og_ionoptik/magnetfelt

Gyldendal. *Universalkonstant*. Lokaliseret d. 9. December 2014:
http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/M%C3%A5l_og_v%C3%A6gt/universalkonstant

Wolfram mathworld. *Spherical coordinates*. Lokaliseret d. 17 December 2014:
http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html

Billeder:

DTU Space. *Swarm magnetometer data*. Beskrivelse af satellitdata vedlagt som bilag 4.

Foullon, Claire. *Geomagnetic observatories in operation – 1995.* Lokaliseret d. 15. December 2014: http://www.mssl.ucl.ac.uk/~cf2/Eleven/Fig13.png

Hall-sonde illustration: http://www.chemgapedia.de/vsengine/media/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/magnetfeld/bilder/halleffekt.jpg

Bilag:

Bilag 1: Det oscillerende forsøg

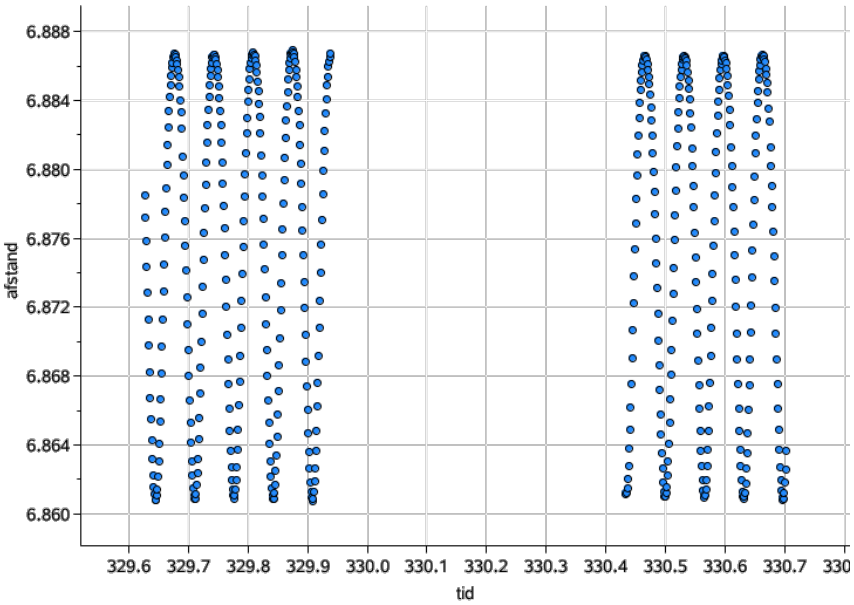
vinkel	Bθ	Br	Bθnorm	brnorm	måling φ
90	1,2	0,2	1	0,16666667	0
80	1,2	0,5	1	0,41666667	0
70	1,1	0,8	0,91666667	0,66666667	0
60	1	1,1	0,83333333	0,91666667	0
50	0,9	1,4	0,75	1,16666667	0
40	0,8	1,6	0,66666667	1,33333333	0
30	0,6	1,8	0,5	1,5	0
20	0,5	2	0,41666667	1,66666667	0
10	0,3	2,2	0,25	1,83333333	0
0	0	2,2	0	1,83333333	0
-10	-0,3	2,1	-0,25	1,75	0
-20	-0,4	2	-0,3333333	1,66666667	0
-30	-0,6	1,9	-0,5	1,58333333	0
-40	-0,8	1,6	-0,6666667	1,33333333	0
-50	-0,9	1,4	-0,75	1,16666667	0
-60	-1	1,2	-0,8333333	1	0
-70	-1,1	0,8	-0,9166667	0,66666667	0
-80	-1,2	0,4	-1	0,33333333	0
-90	-1,2	0	-1	0	0

Bilag 2: Hall-sonde forsøget

vinkel	Bθ	Br	Bθnorm	Brnorm	phi
90	-1.5	-0.4	-1	-0.2666667	0
80	-1.6	0	-1.0666667	0	0
70	-1.8	0.5	-1.2	0.33333333	0
60	-1.9	1	-1.2666667	0.66666667	0
50	-1.8	1.5	-1.2	1	0
40	-1.7	2.3	-1.1333333	1.53333333	0
30	-1.3	2.9	-0.8666667	1.93333333	0
20	-1	3.3	-0.6666667	2.2	0
10	-0.7	3.4	-0.4666667	2.26666667	0
0	-0.5	3.5	-0.3333333	2.33333333	0
-10	-0.2	3.1	-0.1333333	2.06666667	0
-20	0.1	3.1	0.06666667	2.06666667	0
-30	0.4	3.1	0.26666667	2.06666667	0
-40	0.7	2.8	0.46666667	1.86666667	0
-50	1.1	2.3	0.73333333	1.53333333	0
-60	1.2	1.7	0.8	1.13333333	0
-70	1.3	1.1	0.86666667	0.73333333	0
-80	1.3	0.7	0.86666667	0.46666667	0
-90	1.3	0.3	0.86666667	0.2	0
-100	1.4	-0.1	0.93333333	-0.0666667	
-110	1.4	-0.4	0.93333333	-0.2666667	
-120	1.4	-0.8	0.93333333	-0.5333333	
-103	1.5	-1.4	1	-0.9333333	

Bilag 3: Graf for sammenligning af tid og afstand

Graf af sammenligning af tid og afstand:



Bilag 4: Indstilling af oscilloskop

Bilag 4: Beskrivelse af satellitdata

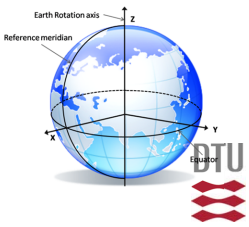
Swarm Magnetometer Data

t [days]	x[10^6m]	y[10^6m]	z[10^6m]	B_x [μT]	B_y [μT]	B_z [μT]	α [°]	β [°]	γ [°]
329.6275	6.5408	-1.6457	-1.3502	18.4903	4.9367	-11.1308	179.8110	12.9650	180.2392
329.6286	6.6400	-1.6881	-0.5974	20.7187	4.5896	-7.7191	179.5201	12.9743	180.5518
329.6298	6.6576	-1.7107	0.1628	22.5551	4.0153	-2.9549	179.2929	12.9880	180.7582
329.6309	6.5937	-1.7121	0.9209	23.5205	3.3179	2.9638	178.9633	13.0049	181.0198
329.6321	6.4494	-1.6911	1.6677	23.3458	2.5661	9.5195	178.3945	13.0215	181.4516
….	….								
	repeat								

t: Tid i dage fra d. 1/1-2013 - datestr(329.6275) = 26-Nov-2013 15:03:36

x,y,z: Satellitposition i geografiske koordinater (rektangulær)

B_x B_y B_z Magnetfeltvektor målt I magnetometer koordinatsystem

α, β, γ Euler vinkler (323) der roterer magnetfeltvektor ind i geografiske koordinater (Nord-Øst-Center)

Geografisk koordinatsystem